14. Tutorium

Montag, 7. Februar 2022 18:22

Mehrteilchensysteme und Pauli-Prinzip

- Wir wollen nun das Verhalten von mehreren Teilchen gleichzeitig beschreiben
- Dafür fügen wir die Hilberträume der einzelnen Teilchen zu einem Gesamtraum zusammen

↳ mathematisches Werkzeug : <u>Tensorprodukt</u>

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N \quad \Rightarrow \quad |\Psi\rangle = |\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi\rangle_2 \otimes \ldots \otimes |\Psi\rangle_N$$

- das haben wir implizit letzte Woche schon benutzt

$$|++\rangle, \ |+-\rangle \quad \Rightarrow \quad |++\rangle = |+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2$$

- Betrachten wir nun beispielhaft zwei Teilchen im Ortsraum mit Spin S und $\underbrace{m_1, m_2}_{\text{magnetische Quantenzahl}}$
(ununterscheidbar)

$$\Rightarrow \langle r | m_1, m_2 \rangle = \Psi(m_1, m_2, r)$$

- da wir beide Teilchen als ununterscheidbar betrachten, können wir bei einer Messung des Ortes nicht wissen, welches Teilchen welchen Spin getragen hat

$$\Rightarrow |\Psi(m_1, m_2)|^2 = |\Psi(m_2, m_1)|^2$$

- Wurzelziehen: $\Psi(m_1, m_2) = \pm \Psi(m_2, m_1)$

Es gibt nun zwei verschiedene allgemeine Lösungen

$$\Psi_1(m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi(m_1, m_2) + \Psi(m_2, m_1) \right) = + \Psi_1(m_2, m_1) \quad \text{Symmetrische Lösung}$$

$$\Psi_2(m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi(m_1, m_2) - \Psi(m_2, m_1) \right) = - \Psi_1(m_2, m_1) \quad \text{Antisymmetrische Lösung}$$

- Alle Teilchen müssen sich für <u>eine</u> dieser Lösungen entscheiden.

⇒ Teilchen mit symm. Lösung: Bosonen
Teilchen mit antisymm. Lösung: Fermionen

Nach dem Spin-Statistik Theorem folgt:

Bosonen ganzzahliger Spin $(0, 1, 2)$
Fermionen halbzahliger Spin $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

- zusammengesetzte Teilchen α - He^{2+}
- Photonen, Gluonen, Higgs-Boson } WW Teilchen
- Elektronen, Neutrinos
- Protonen, Neutronen } Materie Teilchen

Was heißt das nun für Fermionen? Betrachte zwei Elektronen $S = \frac{1}{2} \rightarrow \Psi_2(m_1, m_2)$

$$\Psi_2(m_1, m_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi(m_1, m_2) - \Psi(m_2, m_1) \right)$$

Sei nun $m_1 = m_2$

$$\Psi_2(m_1,m_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi(m_1,m_2) - \Psi(m_2,m_1)\right) \qquad \text{Sei nun } m_1 = m_2$$

$$\Rightarrow \Psi_2(m_1,m_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi(m_1,m_1) - \Psi(m_1,m_1)\right) = 0$$

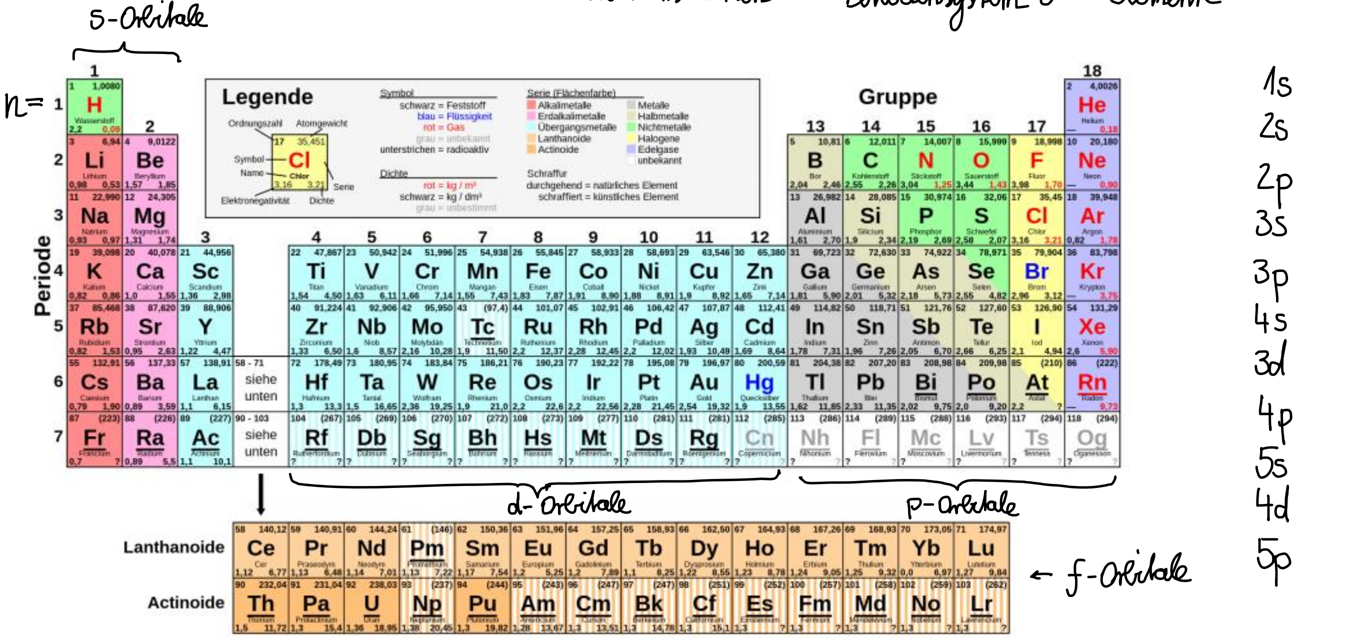
· Zwei Fermionen mit gleichem Spin können sich nicht gemeinsam an einem Ort aufhalten

Pauli-Prinzip: Die Wellenfunktion von Fermionen ist total antisymmetrisch unter Vertauschung

$$\hat{P}\,\Psi(\vec{r}_1, s_1; \vec{r}_2, s_2) = -\Psi(\vec{r}_2, s_2; \vec{r}_1, s_1)$$

↑ Permutationsoperator

→ für die Beschreibung von Atomen heißt das: Zwei Elektronen dürfen nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen → Periodensystem der Elemente



Verschränkung:

· Sei $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ein Zustand eines Mehrteilchensystems.

· Wir nennen $|\Psi\rangle$ separabel, falls es Zustände $|\Psi\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$ und $|\Psi\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$ gilt, sodass

$$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi\rangle_2$$

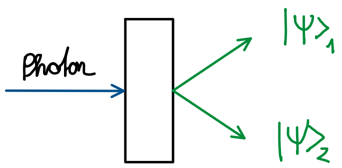
· Ein Zustand $|\Psi\rangle$ heißt verschränkt, falls er nicht separabel ist
↳ nicht durch klassische Theorien beschreibbar

Beispiel: Spontaneous parametric down conversion SPDC

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

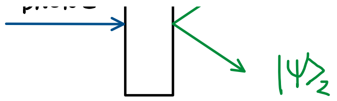
↑ Photon nach oben

↖ Photon nach unten



$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$\uparrow$ Photon nach oben $\nwarrow$ Photon nach unten



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|VH\rangle + |HV\rangle\right)$$

oben V, unten h

V - vertikal polarisiert
H - horizontal polarisiert

Können wir diesen Zustand als Produkt schreiben von: $|V\rangle_1, |H\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$ $|H\rangle_2, |V\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$?

· Nehmen wir an wir könnten es:

$$|\Psi\rangle = \left(\lambda_1 |V\rangle_1 + \mu_1 |H\rangle_1\right) \otimes \left(\lambda_2 |V\rangle_2 + \mu_2 |H\rangle_2\right)$$

$$= \underbrace{\lambda_1\lambda_2}_{=0} |VV\rangle + \underbrace{\mu_1\lambda_2}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} |HV\rangle + \underbrace{\lambda_1\mu_2}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} |VH\rangle + \underbrace{\mu_1\mu_2}_{=0} |HH\rangle$$

$\Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = 0$ Angenommen $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1\mu_2 = 0$ ↯ Widerspruch

$\Rightarrow$ Es existiert keine Lösung $\Rightarrow$ Der Zustand ist verschränkt.

Der statistische Operator

· für unsere bisherigen Rechnungen haben wir immer ein Ensemble aus identisch präparierten Teilchen angenommen

· wir nennen dies einen reinen Zustand

↳ beschreibbar durch einen Ket $|\alpha\rangle$ z.B. $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$

· Wir könnten in unserem Ensemble auch Teilchen aus verschiedenen Zuständen haben

↳ wir nennen dies einen gemischten Zustand

z.B. Strahl an Silberatomen 75 % sind in $|+\rangle_z$
25 % sind in $|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + |-\rangle_z\right)$

· Frage: Wie beschreiben wir gemischte Zustände? Wie lässt sich der Erwartungswert berechnen?

Es gilt immer $\sum_{i=1}^{N} W_i = 1$ hier: $W_1(S_z+) = 0{,}75$
$W_2(S_x+) = 0{,}25$

$\uparrow$ Wahrscheinlichkeit für Zustand i

· Der Erwartungswert von $\hat{A}$ wird nun wie folgt definiert:

$$\overline{A} = \sum_{i=1}^{N} W_i \langle\alpha_i|\hat{A}|\alpha_i\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{a} W_i \langle\alpha_i|\underbrace{\hat{A}|a\rangle}_{a|a\rangle}\langle a|\alpha_i\rangle = \sum_i\sum_a W_i\, a\, |\langle\alpha_i|a\rangle|^2$$

Vollständigkeit

Wichtung von α_i

gemessener Wert von $\hat{A}$

Wahrschein-

Vollständigkeit $\qquad \underbrace{}_{a|a\rangle}$

gemessener Wert von $\hat{A}$ $\qquad$ Wahrscheinlichkeit a zu messen

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_a \sum_b W_i \langle \alpha_i | b \rangle \langle b | \hat{A} | a \rangle \langle a | \alpha_i \rangle$$

$$= \sum_a \sum_b \underbrace{\left(\sum_i W_i \langle a | \alpha_i \rangle \langle \alpha_i | b \rangle \right)}_{\text{Unabhängig von } \hat{A}} \langle b | \hat{A} | a \rangle$$

Unabhängig von $\hat{A}$ $\Rightarrow$ neue Bezeichnung

Statistischer Operator $\hat{\rho} := \sum_i W_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ $\qquad$ Basis unabhängig!

(Dichteoperator)

$$\Rightarrow \quad \bar{A} = \sum_a \sum_b \underbrace{\langle a | \hat{\rho} | b \rangle}_{\text{Matrixelement von } \hat{\rho}} \langle b | \hat{A} | a \rangle = \sum_a \langle a | \hat{\rho} \cdot \hat{A} | a \rangle =: \underline{\underline{\mathrm{Tr}(\hat{\rho} \cdot \hat{A})}}$$

Für unser Beispiel:

$$\hat{\rho} = 0{,}75 \underbrace{|+\rangle\langle+|}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + 0{,}25 \underbrace{|S_x+\rangle\langle S_x+|}_{\frac{1}{2}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)\left(\langle+| + \langle-|\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{S}_z = \mathrm{Tr}(\hat{\rho} \cdot \hat{S}_z) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 7/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_z} \right) = \frac{\hbar}{2} \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 7/8 & \cdots \\ \cdots & -1/8 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{6}{8} = \hbar \frac{3}{8}.$$

<u>Weitere Eigenschaften:</u>

1.) $\rho = \rho^{+}$

2.) $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$

3.) $\mathrm{Tr}(\rho^2) \leq 1$